# Aula 45

## EDOs Lineares de Ordem Superior à Primeira de Coeficientes Constantes Homogéneas

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2\frac{d^2y}{dt^2} + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = 0$$

$$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$$

## Operadores de Derivação

Proposição: Seja $D = \frac{d}{dt}$ o operador de derivação em ordem ao tempo. Então tem-se

$$(D-\lambda_1)(D-\lambda_2) = (D-\lambda_2)(D-\lambda_1) = D^2-(\lambda_1+\lambda_2)D+\lambda_1\lambda_2$$

para quaisquer $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$.

Exemplo:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 6y = 0$$

Polinómio Característico

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0$$

Valores Próprios: $\lambda = 3, -2$

Duas Soluções Linearmente Independentes: $e^{3t}$, $e^{-2t}$

Operadores de Derivação

$$(D^2 - D - 6)y = 0 \Leftrightarrow (D-3)(D+2)y = 0 \Leftrightarrow (D+2)(D-3)y = 0$$

Duas Soluções Linearmente Independentes: $e^{3t}$, $e^{-2t}$

Solução Geral:

$$y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-2t}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Proposição: Dada uma EDO de ordem $n$ linear homogénea, de coeficientes constantes,

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2\frac{d^2y}{dt^2} + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = 0$$

factorizada com operadores de derivação na forma

$$(D-\lambda_1)^{n_1}(D-\lambda_2)^{n_2}\cdots(D-\lambda_k)^{n_k}y = 0, \quad n_1+n_2+\cdots+n_k = n$$

a sua solução geral (complexa, se existirem $\lambda$ complexos, em pares conjugados) é dada por

$$\begin{aligned} y(t) = {} & c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_{n_1} t^{n_1-1} e^{\lambda_1 t} + \\ & + c_{n_1+1} e^{\lambda_2 t} + c_{n_1+2} t e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_{n_1+n_2} t^{n_2-1} e^{\lambda_2 t} + \\ & + \cdots + c_n t^{n_k-1} e^{\lambda_k t} \end{aligned}$$

No caso de raízes complexas conjugadas $\lambda_j = a_j \pm i b_j$ as correspondentes soluções reais linearmente independentes são da forma

$$t^m e^{a_j t}\cos(b_j t) \quad \text{e} \quad t^m e^{a_j t}\operatorname{sen}(b_j t)$$

# Resolução de EDOs Lineares de Ordem Superior Não Homogéneas de Coeficientes Constantes pelo Método dos Aniquiladores

Para termos não homogéneos $b(t)$ que são combinações lineares de

$$t^m e^{\lambda t}, \qquad m \in \mathbb{Z}_0^+, \lambda \in \mathbb{R},$$

$$t^m e^{a_j t} \cos(b_j t),\ t^m e^{a_j t} \operatorname{sen}(b_j t) \qquad m \in \mathbb{Z}_0^+, a, b \in \mathbb{R}$$

# Resolução Geral de EDOs Lineares de Ordem Superior Não Homogéneas de Coeficientes Constantes pela Fórmula da Variação das Constantes

Proposição: Dada uma EDO de ordem $n$ linear homogénea,

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2(t)\frac{d^2 y}{dt^2} + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_0(t)y = 0$$

e $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ uma qualquer base do seu espaço de soluções, ou sejam, $n$ quaisquer soluções linearmente independentes, chama-se **matriz wronskiana** associada a essas soluções à correspondente matriz fundamental do sistema de primeira ordem equivalente

$$W(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \cdots & y_n'(t) \\ y_1''(t) & y_2''(t) & \cdots & y_n''(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

Teorema (Fórmula da Variação das Constantes): Sejam $a_1(t), a_2(t), \ldots, a_n(t)$ e $b(t)$ funções contínuas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ uma qualquer base do espaço de soluções da equação diferencial ordinária linear homogénea de ordem $n$

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2(t)\frac{d^2 y}{dt^2} + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_0(t)y = 0.$$

Então, a solução geral da equação não homogénea

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2(t)\frac{d^2 y}{dt^2} + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_0(t)y = b(t),$$

é dada pela **Fórmula da Variação das Constantes**

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_n y_n(t) + \\ &\quad + \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \end{bmatrix} \int b(t) \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\text{ultima coluna de } W^{-1}(t)} dt \end{aligned}$$

A solução do problema de valor inicial $y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}$ é dada correspondentemente por

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & W^{-1}(t_0) & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_0' \\ y_0'' \\ \vdots \\ y_0^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \end{bmatrix} \int_{t_0}^{t} b(s) \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\text{ultima coluna de } W^{-1}(s)} ds$$